Factorisation corrigé

2021-02-05 14:17

Factorisation corrigé

ÉCOLE SECONDAIRE d'ANJOU

MATHÉMATIQUE

Passerelle (CST4 vers SN4)

MANIPULATIONS ALGÉBRIQUES

FACTORISATION

CORRIGÉ

Document préparé par Daniel Barré ET Nadine Francoeur

2019-2020

CHAPITRE 2 > Manipulations algébriques

RENFORCEMENT 2.1 Multiplication d'expressions algébriques

1. **a** $(7a^3b^2 + 9a^5b^4)(5ab^4 - 2ab)$

$= 7a^3b^2(5ab^4 - 2ab) + 9a^5b^4(5ab^4 - 2ab)$

$= 35a^4b^6 - 14a^4b^3 + 45a^6b^8 - 18a^6b^5$

b $(14xy^6 + 3x^2y^3)(8x^5y^5 + 6x^6y^2)$

$= 14xy^6(8x^5y^5 + 6x^6y^2) + 3x^2y^3(8x^5y^5 + 6x^6$

$= 112x^6y^{11} + 84x^7y^8 + 24x^7y^8 + 18x^8y^5$

$= 112x^6y^{11} + 108x^7y^8 + 18x^8y^5$

c $(6b^4 + 2b^3)(5b^2 - 4b + 3)$

$= 6b^4(5b^2 - 4b + 3) + 2b^3(5b^2 - 4b + 3)$

$= 30b^6 - 24b^5 + 18b^4 + 10b^5 - 8b^4 + 6b^3$

$= 30b^6 - 14b^5 + 10b^4 + 6b^3$

d $(5x^3y^2 + 7xy^2)(6x^4 + 4x^3 + x^2)$

$= 5x^3y^2(6x^4 + 4x^3 + x^2) + 7xy^3(6x^4 + 4x^3 + x$

$= 30x^7y^2 + 20x^6y^2 + 5x^5y^2 + 42x^5y^2 + 28x^4y$

$= 30x^7y^2 + 20x^6y^2 + 47x^5y^2 + 28x^4y^2 + 7x^3y$

2. **a**

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$= \frac{(2x^3 + 5x^2) \times (8x^4 - 6)}{2}$$

$$= \frac{16x^7 + 40x^6 - 12x^3 - 30x^2}{2}$$

$$= (8x^7 + 20x^6 - 6x^3 - 15x^2)\ \text{cm}^2$$

b

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

$$= \frac{(3a^2 + 8b) \times (2a^2 + 7b)}{2}$$

$$= \frac{6a^4 + 21a^2b + 16a^2b + 56b^2}{2}$$

$$= (3a^4 + 18{,}5a^2b + 28b^2)\ \text{cm}^2$$

3. **a**

$A = b \times h \times l$

$= (11x^4 + 4x^3)(6x^2 - 5x)(8x + 3$

$= (66x^6 - 31x^5 - 20x^4)(8x + 3)$

$= 528x^7 - 248x^6 - 160x^5 + 198x^6 - 93x$

$= (528x^7 - 50x^6 - 253x^5 - 60x^4)$ c

b

$A = c^3$

$= (3b + 7)^3$

$= (3b + 7)(3b + 7)(3b + 7)$

$= (9b^2 + 42b + 49)(3b + 7)$

$= 27b^3 + 126b^2 + 147b + 63b^2 + 294b + 343$

$= (27b^3 + 189b^2 + 414b + 343)\ \text{cm}^3$

4. Nombre de romans de chaque type :

Drame : $(2x + 3) \times (4x^2 - 9) = 8x^3 + 12x^2 - 18x - 27$
Policier : $(12x - 5) \times (7x + 3) = 84x^2 + x - 15$
Suspense : $(10x + 1) \times (6x^2 + 3x + 8) = 60x^3 + 36x^2 + 83x + 8$
Science-fiction : $(8x + 7) \times (8x - 7) = 64x^2 - 49$

Nombre total de romans :
$(8x^3 + 12x^2 - 18x - 27) + (84x^2 + x - 15) + (60x^3 + 36x^2 + 83x + 8) + (64x^2 - 49) = (68x^3 + 196x^2 + 66x - 83)$ romans

Réponse : Il y a $(68x^3 + 196x^2 + 66x - 83)$ romans dans cette bibliothèque.

RENFORCEMENT 2.2 Division de polynômes

1. a)

$$\begin{array}{r|l}
8x^4 - 26x^3 + 25x^2 + 17x - 42 & 2x^3 - 3x^2 + x + 6 \\ \cline{2-2}
-(8x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 24x) & 4x - 7 \\ \cline{1-1}
-14x^3 + 21x^2 - 7x - 42 & \\
-(-14x^3 + 21x^2 - 7x - 42) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l}
60x^6y^3 + 36x^5y^2 - 45x^3y^2 - 27x^2y & 5x^2y + 3x \\ \cline{2-2}
-(60x^6y^3 + 36x^5y^2) & 12x^4y^2 - 9xy \\ \cline{1-1}
0 - 45x^3y^2 - 27x^2y & \\
-(-45x^3y^2 - 27x^2y) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l}
-15a^2b^4 - 11a^2b^3 - 2a^2b^2 + 17ab^2 + 7ab + 4 & -3ab^2 - ab + 4 \\ \cline{2-2}
-(-15a^2b^4 - 5a^2b^3 + 20ab^2) & 5ab^2 + 2ab + 1 \\ \cline{1-1}
-6a^2b^3 - 2a^2b^2 - 3ab^2 + 7ab + 4 & \\
-(-6a^2b^3 - 2a^2b^2 + 8ab) & \\ \cline{1-1}
-3ab^2 - ab + 4 & \\
-(-3ab^2 - ab + 4) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l}
16x^8z^{10} + 42x^7z^7 + 20x^6z^4 & 2x^5z^4 + 4x^4z \\ \cline{2-2}
-(16x^8z^{10} + 32x^7z^7) & 8x^3z^6 + 5x^2z^3 \\ \cline{1-1}
10x^7z^7 + 20x^6z^4 & \\
-(10x^7z^7 + 20x^6z^4) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

2. a)

$$\begin{array}{r|l}
4x^2 + 9x - 5 & -x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-(4x^2 - 8x - 12) & -4 \\ \cline{1-1}
17x + 7 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l}
40a^2 - 41a + 42 & 5a - 7 \\ \cline{2-2}
-(40a^2 - 56a) & 8a + 3 \\ \cline{1-1}
15a + 42 & \\
-(15a - 21) & \\ \cline{1-1}
63 &
\end{array}$$

3 a

$$A = b \times h$$
$$12x^3 + 23x^2 - 24x + 5 = b \times (3x - 1)$$
$$b = (12x^3 + 23x^2 - 24x + 5) \div (3x - 1)$$
$$= (4x^2 + 9x - 5)\ \text{m}$$

b)

$$A = \frac{b \times h}{2}$$
$$30a^3 + 18a^2 + 10a + 6 = \frac{(12a^2 + 4) \times h}{2}$$
$$(60a^3 + 36a^2 + 20a + 12) \div (12a^2 + 4) = h$$
$$h = (5a + 3)\ \text{m}$$

c)

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

$$\begin{aligned} 12x^4 + 16x^3 + 9x + 12 &= \frac{(8x^3 + 6) \times h}{2} \\ (24x^4 + 32x^3 + 18x + 24) \div (8x^3 + 6) &= h \\ h &= (3x + 4)\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} A &= \frac{can}{2} \\ 168b^2 - 183b + 45 &= c \times (8b - 3) \times 3 \\ (56b^2 - 61b + 15) \div (8b - 3) &= c \\ c &= (7b - 5)\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

4. Nombre total de cartes : $(20x^2 + 50x + 4) + (9x + 29) = (20x^2 + 59x + 33)$ cartes
Nombre total de personnes : $4x + 2 + 1 = (4x + 3)$ personnes
Moyenne : $(20x^2 + 59x + 33) \div (4x + 3) = (5x + 11)$ cartes

Réponse : Chacun possède en moyenne $(5x + 11)$ cartes.

RENFORCEMENT 3.1

Mise en évidence double

1. a)

$$\begin{aligned} &ab + 4a - 5b - 20 \\ &= a(b + 4) - 5(b + 4) \\ &= (\boldsymbol{b + 4})(a - 5) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &cd - 2c - 7d - 14 \\ &= c(d - 2) - 7(d - 2) \\ &= (d - 2)(\boldsymbol{c - 7}) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &xy + 8x + 7y + 56 \\ &= x(y + 8) + 7(y + 8) \\ &= (y + 8)(\boldsymbol{x + 7}) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} &ab + 2a - 2b - 2 \\ &= a(b + 2) - 2(b + 2) \\ &= (b + 2)(\boldsymbol{a - 2}) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &12xy + 8x - 3y - 2 \\ &= 4x(3y + 2) - (3y + 2) \\ &= (3y + 2)(\boldsymbol{4x - 1}) \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} &10ab + 5a + 8b + 4 \\ &= 5a(2b + 1) + 4(2b + 1) \\ &= (\boldsymbol{2b + 1})(5a + 4) \end{aligned}$$

2.

×	$(y+3)$	$(y-4)$	$(y+2)$
$(x-2)$	$xy+3x-2y-6$	$xy-4x-2y+8$	$xy+2x-2y-4$
$(x+3)$	$xy+3x+3y+9$	$xy-4x+3y-12$	$xy+2x+3y+6$
$(x-4)$	$xy+3x-4y-12$	$xy-4x-4y+16$	$xy+2x-4y-8$

3. a

$$\begin{aligned} & xy+3y+8x+24 \\ &= y(x+3)+8(x+3) \\ &= (x+3)\,(y+8) \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} & xy+9x-6y-54 \\ &= x(y+9)-6(y+9) \\ &= (y+9)\,(x-6) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & cd+1-c-d \\ & cd-c-d+1 \\ &= c(d-1)-(d-1) \\ &= (d-1)\,(c-1) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & 20ab+20-16a-25b \\ & 20ab-16a-25b+20 \\ &= 4a(5b-4a)-5(5b-4) \\ &= (5b-4)\,(4a-5) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} & 9st+16+12s+12t \\ & 9st+12s+12t+16 \\ &= 3s(3t+4)+4(3t+4) \\ &= (3t+4)\,(3s+4) \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} & 2x^2y-10y+3x^2-15 \\ & 2x^2y-10y+3x^2-15 \\ &= 2y(x^2-5)+3(x^2-5) \\ &= (x^2-5)\,(2y+3) \end{aligned}$$

4. En factorisant l'expression, il est possible de déterminer que :

$$\begin{aligned} 2a^2+48+24a+4a &= (2a^2+24a)+(4a+48) \\ &= 2a(a+12)+4(a+12) \\ &= (2a+4)\,(a+12) \end{aligned}$$

On déduit que le plus grand côté correspond à l'expression

$2a+4$: $60 = 2a+4$

$a = 28$

Le plus petit côté correspond à l'expression $a+12$: $28+12=40$

Aire totale du terrain : $40 \times 60 = 2400$ m^2

Prix du terrain : $2400 \times 22 = 52\,800$ $

Réponse : Le prix du terrain est de 52 800 $.

RENFORCEMENT 3.2 Trinôme carré parfait et différence de deux carrés

1. **a)**
$$a^2 + 16a + 64$$
$$= \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{64}\right)^2$$
$$= (a + 8)^2$$

b)
$$b^2 - 20b + 100$$
$$= \left(\sqrt{b^2} - \sqrt{100}\right)^2$$
$$= (b - 10)^2$$

c)
$$4c^2 + 20c + 25$$
$$= \left(\sqrt{4c^2} + \sqrt{25}\right)^2$$
$$= (2c + 5)^2$$

d)
$$49d^2 - 210d + 225$$
$$49d^2 - 210d + 225$$
$$= \left(\sqrt{49d^2} - \sqrt{225}\right)^2$$
$$= (7d - 15)^2$$

e)
$$16e^2 + 40e + 25$$
$$16e^2 + 40e + 25$$
$$= \left(\sqrt{16e^2} + \sqrt{25}\right)^2$$
$$= (4e + 5)^2$$

f)
$$121f^2 - 66fg + 9g^2$$
$$121f^2 - 66fg + 9g^2$$
$$= \left(\sqrt{121f^2} - \sqrt{9g^2}\right)^2$$
$$= (11f - 3g)^2$$

2. **a)**
$$a^2 - 16$$
$$= (a)^2 - (4)^2$$
$$= (a + 4)(a - 4)$$

b)
$$b^2 - 400$$
$$= (b)^2 - (20)^2$$
$$= (b + 20)(b - 20)$$

c)
$$81c^2 - 1$$
$$= (9c)^2 - (1)^2$$
$$= (9c + 1)(9c - 1)$$

d)
$$144d^2 - 625$$
$$= (12d)^2 - (25)^2$$
$$= (12d + 25)(12d - 25)$$

e)
$$e^2 - 2{,}25$$
$$= (e)^2 - (1{,}5)^2$$
$$= (e + 1{,}5)(e - 1{,}5)$$

f)
$$4f^2 - 25g^2$$
$$= (2f)^2 - (5g)^2$$
$$= (2f + 5g)(2f - 5g)$$

3. Ⓐ − ⑧, Ⓑ − ⑥, Ⓒ − ②, Ⓓ − ④, Ⓔ − ⑦, Ⓕ − ⑤, Ⓖ − ①, Ⓗ − ③.

4. $A_{\text{rectangle}} = L \times l$
$= 9x^2 - 42{,}25$

On factorise cette expression :
$9x^2 - 42{,}25 = (3x + 6{,}5)(3x - 6{,}5)$

Puisque $x > 0$, $(3x + 6{,}5)$ est une dimension plus grande que $(3x - 6{,}5)$, il s'agit donc de la dimension du plus grand côté.

Réponse : Le plus grand côté du rectangle mesure $(3x + 6{,}5)$ m.

5. Puisque $A_{\text{carré}} = c^2$, on peut déterminer la mesure d'un côté en factorisant l'expression :
$4x^2 + 56x + 49 = (2x + 7)^2$ mm

On peut déduire le périmètre à partir de la mesure de ce côté :
$$P_{\text{carré}} = 4(2x + 7)$$
$$= (8x + 28)\ \text{m}$$

Réponse : L'expression algébrique qui représente le périmètre du timbre est $(8x + 28)$ mm.

RENFORCEMENT 3.3 Complétion du carré

1. **a)** **1)** 16 **2)** $(x + 4)^2$ **b)** **1)** 100 **2)** $(x + 10)^2$
c) **1)** 36 **2)** $(x - 6)^2$ **d)** **1)** 2500 **2)** $(x - 50)^2$
e) **1)** 225 **2)** $(x + 15)^2$ **f)** **1)** 12,25 **2)** $(x - 3{,}5)^2$

g) **1)** 0,25 **2)** $(x-0,5)^2$ **h)** **1)** 6,25 **2)** $(x+2,5)^2$

2. **a)**

$$\begin{aligned}
&x^2+14x+48\\
&=x^2+14x+49-49+48\\
&=(x^2+14x+49)-1\\
&=(x+7)^2-1\\
&=(x+7+1)(x+7-1)\\
&=(x+8)(x+6)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&x^2-x-12\\
&=x^2-x+0,25-0,25-12\\
&=(x^2-x+0,25)-12,25\\
&=(x-0,5)^2-12,25\\
&=(x-0,5+3,5)(x-0,5-3,5)\\
&=(x+3)(x-4)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&4x^2+44x+117\\
&=4(x^2-11x+29,25)\\
&=4(x^2-11x+30,25-30,25+29,25)\\
&=4\big((x^2-11x+30,25)-1\big)\\
&=4((x-5,5)^2-1)\\
&=4(x-5,5+1)(x-5,5-1)\\
&=4(x-4,5)(x-6,5)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&100x^2+60x-432\\
&=100(x^2+0,6x-4,32)\\
&=100(x^2+0,6x+0,09-0,09-4,32)\\
&=100\big((x^2+0,6x+0,09)-4,41\big)\\
&=100((x+0,3)^2-4,41)\\
&=100(x+0,3+2,1)(x+0,3-2,1)\\
&=100(x+2,4)(x-1,8)
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&-8x^2-60x+2000\\
&=-8(x^2+7,5x-250)\\
&=-8(x^2+7,5x+14,0625-14,0625-250)\\
&=-8\big((x^2+7,5x+14,0625)-264,0625\big)\\
&=-8((x+3,75)^2-264,0625)\\
&=-8(x+3,75+16,25)(x+3,75-16,25)\\
&=-8(x+20)(x-12,5)
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&12x^2+24x+9\\
&=12(x^2+2x+0,75)\\
&=12(x^2+2x+1-1+0,75)\\
&=12\big((x^2+2x+1)-0,25\big)\\
&=12((x+1)^2-0,25)\\
&=12(x+1+0,5)(x+1-0,5)\\
&=12(x+1,5)(x+0,5)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
A_{\text{triangle}}&=\frac{b\times h}{2}\\
&=0,5x^2+6,5x+19,125\\
b\times h&=x^2+13x+38,25
\end{aligned}$$

On factorise cette expression :

$$\begin{aligned}
x^2+13x+38,25&=x^2+13x+42,25-42,25+38,25\\
&=(x^2+13x+42,25)-4\\
&=(x+6,5)^2-4\\
&=(x+6,5+2)(x+6,5-2)\\
&=(x+8,5)(x+4,5)
\end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, $(x + 4,5)$ est une dimension plus petite que $(x + 8,5)$, il s'agit donc de la dimension de la hauteur du triangle.

Réponse : La hauteur du triangle mesure $(x + 4,5)$ m.

4.

$$\begin{aligned}
A_{\text{rectangle}}&=L\times l\\
&=x^2+7,5x+12,5
\end{aligned}$$

On factorise cette expression :

$$\begin{aligned}
x^2+7,5x+12,5&=x^2+7,5x+14,0625-14,0625+12,5\\
&=(x^2+7,5x+14,0625)-1,5625\\
&=(x+3,75)^2-1,5625\\
&=(x+3,75+1,25)(x+3,75-1,25)\\
&=(x+5)(x+2,5)
\end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, $(x + 2,5)$ est une dimension plus petite que $(x + 5)$, il s'agit donc du côté qui mesure 25 cm :

$x + 2,5 = 25$

$x = 22,5$ cm

Dimension du plus grand côté : $22,5 + 5 = 27,5$ cm

Réponse : Le plus grand côté du rectangle mesure 27,5 cm.

RENFORCEMENT 3.4 Factorisation de trinômes

1.

	$m \times n$	m	n	$m + n$
a)	60	**4**	**15**	19
b)	-60	**-5**	**12**	7
c)	-60	**6**	**-10**	-4
d)	60	**-5**	**-12**	-17
e)	-60	**3**	**-20**	-17

	$m \times n$	m	n	$m + n$
f)	-15	**5**	**-3**	2
g)	24	**-3**	**-8**	-11
h)	-36	**-6**	**6**	0
i)	36	**-3**	**-12**	-15

2. **a)** Vrai. **b)** Faux **c)** Faux **d)** Vrai. **e)** Vrai. **f)** Faux **g)** Vrai. **h)** Vrai.

3. **a)** $x^2 + 14x + 24$
$m \times n = 24$
$m + n = 14$
Donc, $m = 12$ et $n = 2$.
$x^2 + 14x + 24$
$= (x + 12)(x + 2)$

b) $x^2 - 6x - 27$
$m \times n = -27$
$m + n = -6$
Donc, $m = 3$ et $n = -9$.
$x^2 - 6x - 27$
$= (x + 3)(x - 9)$

c) $x^2 - 11x + 10$
$m \times n = 10$
$m + n = -11$
Donc, $m = -1$ et $n = -10$.
$x^2 - 11x + 10$
$= (x - 1)(x - 10)$

d) $x^2 - 26x - 120$
$m \times n = -120$
$m + n = -26$
Donc, $m = 4$ et $n = -30$.
$x^2 - 26x - 120$
$= (x + 4)(x - 30)$

e) $x^2 - 17x + 60$
$m \times n = 60$
$m + n = -17$
Donc, $m = -5$ et $n = -12$.
$x^2 - 17x + 60$
$= (x - 5)(x - 12)$

f) $x^2 - 13x - 48$
$m \times n = -48$
$m + n = -13$
Donc, $m = 3$ et $n = -16$.
$x^2 - 13x - 48$
$= (x + 3)(x - 16)$

4. **a)** $2x^2 + 19x + 45$

$m \times n = 90$

$m + n = 19$

Donc, $m = 10$ et $n = 9$.

$2x^2 + 19x + 45$

$= 2x^2 + \mathbf{10x} + \mathbf{9x} + 45$

$= 2x(x + 5) + 9(x + 5)$

$= (x + 5)(2x + 9)$

b) $4x^2 - 19x - 5$

$m \times n = -20$

$m + n = -19$

Donc, $m = -20$ et $n = 1$.

$4x^2 - 19x - 5$

$= 4x^2 - \mathbf{20x} + \mathbf{x} - 5$

$= 4x(x - 5) + (x - 5)$

$= (x - 5)(4x + 1)$

c) $18x^2 - 33x + 14$

$m \times n = 252$

$m + n = -33$

Donc, $m = -21$ et $n = -12$.

$18x^2 - 33x + 14$

$= 18x^2 - \mathbf{21x} - \mathbf{12x} + 14$

$= 3x(6x - 7) - 2(6x - 7)$

$= (6x - 7)(3x - 2)$

d) $8x^2 - 14x - 15$

$m \times n = -120$

$m + n = -14$

Donc, $m = -20$ et $n = 6$.

$8x^2 - 14x - 15$

$= 8x^2 - \mathbf{20x} + \mathbf{6x} - 15$

$= 4x(2x - 5) + 3(2x - 5)$

$= (2x - 5)(4x + 3)$

e) $3x^2 - 4x + 1$

$m \times n = 3$

$m + n = -4$

Donc, $m = -3$ et $n = -1$.

$3x^2 - 4x + 1$

$= 3x^2 - \mathbf{x} - \mathbf{3x} + 1$

$= x(3x - 1) - (3x - 1)$

$= (3x - 1)(x - 1)$

f) $12x^2 - 17x + 6$

$m \times n = 72$

$m + n = -17$

Donc, $m = -8$ et $n = -9$.

$12x^2 - 17x + 6$

$= 12x^2 - \mathbf{8x} - \mathbf{9x} + 6$

$= 4x(3x - 2) - 3(3x - 2)$

$= (3x - 2)(4x - 3)$

5. En factorisant chaque expression, il est possible de déterminer que :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 11x - 12 &= 5x^2 - 15x + 4x - 12 \\ &= 5x(x - 3) + 4(x - 3) \\ &= (x - 3)(5x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 + 29x + 20 &= 5x^2 + 25x + 4x + 20 \\ &= 5x(x + 5) + 4(x + 5) \\ &= (x + 5)(5x + 4) \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

Réponse :

La longueur, la largeur et la hauteur de ce prisme peuvent mesurer respectivement $(5x + 4)$ m, $(x - 3)$ m et $(x + 5)$ m.

RENFORCEMENT 2.3 Manipulation d'expressions rationnelles

1. **a)**

$$a - 2 \neq 0$$
$$a \neq 2$$

b)

$$3x - 21 \neq 0$$
$$x \neq 7$$

c)

$$5a + 15 \neq 0$$
$$a \neq -3$$

2. **a**

$$\frac{(5x+1)\times 2}{3\times 2} - \frac{19x^2+7x}{6}$$
$$= \frac{10x+2}{6} - \frac{19x^2+7x}{6}$$
$$= \frac{-19x^2+3x+2}{6}$$

b

$$\frac{19x+6-5x^2+11}{3x-4}$$
$$= \frac{-5x^2+19x+17}{3x-4}$$
$$\frac{-5x^2+19x+17}{3x-4}, \text{si } x \neq \frac{4}{3}$$

c

$$\frac{7x-4}{5(2x+1)} + \frac{(3x+8)\times 5}{(2x+1)\times 5}$$
$$= \frac{7x-4+15x+40}{5(2x+1)}$$
$$= \frac{22x+36}{10x+5}$$
$$\frac{22x+36}{10x+5}, \text{si } x \neq -\frac{1}{2}$$

3. **a)**

$$\frac{4x^2-20x-x+5}{14x+21-2x^2-3x}$$
$$= \frac{4x^2-21x+5}{-2x^2+11x+21}$$
$$\frac{4x^2-21x+5}{-2x^2+11x+21}, \text{si } x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 7$$

b)

$$\frac{x^2+3x-2x-6}{15x^2+5x+18x+6}$$
$$= \frac{x^2+x-6}{15x^2+23x+6}$$
$$\frac{x^2+x-6}{15x^2+23x+6}, \text{si } x \neq -\frac{6}{5} \text{ et } x \neq -\frac{1}{3}$$

c)

$$\frac{7x^2+8x-21x-24}{24x^2-4x+54x-9}$$
$$= \frac{7x^2-13x-24}{24x^2+50x-9}$$
$$\frac{7x^2-13x-24}{24x^2+50x-9}, \text{si } x \neq \frac{1}{6} \text{ et } x \neq -\frac{9}{4}$$

4. **a)**

$$\frac{10x-9}{x-4} \times \frac{3x+2}{x+6}$$
$$= \frac{30x^2-7x-18}{x^2+2x-24}$$
$$30x^2-7x-18$$

$\overline{x^2 + 2x - 24}$,

si $x \neq -6, x \neq -\frac{2}{3}$ et $x \neq 4$

b)

$$\frac{8x - 11}{2x + 4} \times \frac{x + 5}{3x - 9}$$

$$= \frac{8x^2 + 29x - 55}{6x^2 - 6x - 36}$$

$\frac{8x^2 + 29x - 55}{6x^2 - 6x - 36}$,

si $x \neq -5, x \neq -2$ et $x \neq 3$

c)

$$\frac{2x + 7}{3x + 13} \times \frac{12x + 6}{4x + 2}$$

$$= \frac{24x^2 + 96x + 42}{12x^2 + 58x + 26}$$

$\frac{24x^2 + 96x + 42}{12x^2 + 58x + 26}$,

si $x \neq -\frac{13}{3}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

5. a)

$$\frac{27x^2 + 9x}{9x^2}$$

$$= \frac{9x(3x + 1)}{9x \times x}$$

$$= \frac{3x + 1}{x}$$

$\frac{3x + 1}{x}$, si $x \neq 0$

b)

$$\frac{(8x + 3)(5x - 2)}{(5x - 2)(11x + 6)}$$

$= \frac{8x + 3}{11x + 6}$, si $x \neq -\frac{6}{11}$ et $x \neq \frac{2}{5}$

c)

$$\frac{(6x + 1)(2x + 3)}{6x + 9}$$

$$= \frac{(6x + 1)(2x + 3)}{3(2x + 3)}$$

$$= \frac{6x + 1}{3}$$

$\frac{6x + 1}{3}$, si $x \neq -\frac{3}{2}$

d)

$$\frac{14x^3 + 22x^2 + 10x}{8x^2 + 6x}$$

$$= \frac{2x(7x^2 + 11x + 5)}{2x(4x + 3)}$$

$$= \frac{7x^2 + 11x + 5}{4x + 3}$$

$\frac{7x^2 + 11x + 5}{4x + 3}$, si $x \neq -\frac{3}{4}$ et $x \neq 0$

e)

$$\frac{34x^3 + 15x^2 - 8x}{8x}$$

$$= \frac{x(34x^2 + 15x - 8)}{8 \times x}$$

$$= \frac{34x^2 + 15x - 8}{8}$$

$\frac{34x^2 + 15x - 8}{8}$, si $x \neq 0$

f)

$$\frac{(7x - 9)(3x + 4)}{12x^2 + 16x}$$

$$= \frac{(7x - 9)(3x + 4)}{4x(3x + 4)}$$

$$= \frac{7x - 9}{4x}$$

$\frac{7x - 9}{4x}$, si $x \neq -\frac{4}{3}$ et $x \neq 0$

6. a)

$$\frac{6x^2 - 21x}{2x - 7} = \frac{3x(2x - 7)}{2x - 7}$$
$$= 3x$$

b) Non, la valeur de *x* associée à cette situation ne peut pas être égale à 3,5, car le dénominateur de l'expression rationnelle associée à cette situation serait alors égal à zéro.

Réponse : Oui, elle atteint son objectif

RENFORCEMENT 3.5 Factorisation et expressions rationnelles

1. a) 1)

$$\frac{x^2 + 5x - 36}{x + 9}$$
$$= \frac{(x - 4)(x + 9)}{x + 9} = \frac{(x - 4)(x + 9)}{x + 9}$$
$$= (x - 4)$$

2) $x \neq -9$

b) 1)

$$\frac{2x^2 + 19x + 24}{x^2 + 6x - 16}$$
$$= \frac{(2x + 3)(x + 8)}{(x - 2)(x + 8)} = \frac{(2x + 3)(x + 8)}{(x - 2)(x + 8)}$$
$$= \frac{2x + 3}{x - 2}$$

2) $x \neq -8$ et $x \neq 2$.

c) 1)

$$\frac{9x^3 + 24x^2 + 16x}{3xy + 3x + 4y + 4}$$
$$= \frac{x(3x + 4)^2}{(3x + 4)\,(y + 1)} = \frac{x(3x + 4)^2}{(3x + 4)\,(y + 1)}$$
$$= \frac{x(3x + 4)}{y + 1}$$

d) 1)

$$\frac{16x^2 - 25}{4x^2 - 9x + 5}$$
$$= \frac{(4x + 5)\,(4x - 5)}{(4x - 5)\,(x - 1)} = \frac{(4x + 5)\,(4x - 5)}{(4x - 5)\,(x - 1)}$$
$$= \frac{4x + 5}{x - 1}$$

2) $x \neq -\frac{4}{3}$ et $y \neq -1$. **2)** $x \neq 1{,}25$ et $x \neq 1$.

2. a) 1)

$$\frac{2}{x+8}+\frac{3}{x-12}$$
$$=\frac{2(x-12)}{(x+8)\,(x-12)}+\frac{3(x+8)}{(x+8)\,(x-12)}$$
$$=\frac{2x-24+3x+24}{(x+8)\,(x-12)}=\frac{5x}{(x+8)\,(x-12)}$$

2) $x \neq -8$ et $x \neq 12$.

b) 1)

$$\frac{6}{2x+3}-\frac{6}{2x-3}$$
$$=\frac{6(2x-3)}{(2x+3)\,(2x-3)}-\frac{6(2x+3)}{(2x+3)\,(2x-3)}$$
$$=\frac{12x-18-12x-18}{(2x+3)\,(2x-3)}=\frac{-36}{(2x+3)\,(2x-3)}$$

2) $x \neq -1{,}5$ et $x \neq 1{,}5$.

c) 1)

$$\frac{3}{x^2-25}+\frac{4}{x^2-6x+5}$$
$$=\frac{3(x-1)}{(x+5)\,(x-5)(x-1)}+\frac{4(x+5)}{(x+5)\,(x-5)(x-1)}$$
$$=\frac{3x-3+4x+20}{(x+5)\,(x-5)\,(x-1)}=\frac{7x+17}{(x+5)\,(x-5)\,(x-1)}$$

2) $x \neq -5, x \neq 1$ et $x \neq 5$.

d) 1)

$$\frac{x-2}{x^2-8x+16}-\frac{2}{x^2-6x+8}$$
$$=\frac{(x-2)\,(x-2)}{(x-4)^2(x-2)}-\frac{2(x-4)}{(x-4)^2(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-4x+4-2x+8}{(x-4)^2(x-2)}=\frac{x^2-6x+12}{(x-4)^2(x-2)}$$

2) $x \neq 2$ et $x \neq 4$.

ÉCOLE
SECONDAIRE
d'ANJOU

MATHÉMATIQUE

Passerelle (CST4 vers SN4)

MANIPULATIONS ALGÉBRIQUES

FACTORISATION

CORRIGÉ

Document préparé par Daniel Barré ET Nadine Francoeur

2019-2020

CHAPITRE 2 > Manipulations algébriques

RENFORCEMENT 2.1 Multiplication d'expressions algébriques

1. a

$$\begin{aligned}&(7a^3b^2+9a^5b^4)(5ab^4-2ab)\\&=7a^3b^2(5ab^4-2ab)+9a^5b^4(5ab^4-2ab)\\&=35a^4b^6-14a^4b^3+45a^6b^8-18a^6b^5\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}&(14xy^6+3x^2y^3)(8x^5y^5+6x^6y^2)\\&=14xy^6(8x^5y^5+6x^6y^2)+3x^2y^3(8x^5y^5+6x^6\\&=112x^6y^{11}+84x^7y^8+24x^7y^8+18x^8y^5\\&=112x^6y^{11}+108x^7y^8+18x^8y^5\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}&(6b^4+2b^3)(5b^2-4b+3)\\&=6b^4(5b^2-4b+3)+2b^3(5b^2-4b+3)\\&=30b^6-24b^5+18b^4+10b^5-8b^4+6b^3\\&=30b^6-14b^5+10b^4+6b^3\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}&(5x^3y^2+7xy^2)(6x^4+4x^3+x^2)\\&=5x^3y^2(6x^4+4x^3+x^2)+7xy^3(6x^4+4x^3+x\\&=30x^7y^2+20x^6y^2+5x^5y^2+42x^5y^2+28x^4y\\&=30x^7y^2+20x^6y^2+47x^5y^2+28x^4y^2+7x^3y\end{aligned}$$

2. a

$$\begin{aligned}A&=\frac{b\times h}{2}\\&=\frac{(2x^3+5x^2)\times(8x^4-6)}{2}\\&=\frac{16x^7+40x^6-12x^3-30x^2}{2}\\&=(8x^7+20x^6-6x^3-15x^2)\text{ cm}^2\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}A&=\frac{D\times d}{2}\\&=\frac{(3a^2+8b)\times(2a^2+7b)}{2}\\&=\frac{6a^4+21a^2b+16a^2b+56b^2}{2}\\&=(3a^4+18{,}5a^2b+28b^2)\text{ cm}^2\end{aligned}$$

3. a

$$\begin{aligned}A&=b\times h\times l\\&=(11x^4+4x^3)(6x^2-5x)(8x+3\\&=(66x^6-31x^5-20x^4)(8x+3)\\&=528x^7-248x^6-160x^5+198x^6-93x\\&=(528x^7-50x^6-253x^5-60x^4)\text{ c}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}A&=c^3\\&=(3b+7)^3\\&=(3b+7)(3b+7)(3b+7)\\&=(9b^2+42b+49)(3b+7)\\&=27b^3+126b^2+147b+63b^2+294b+343\\&=(27b^3+189b^2+414b+343)\text{ cm}^3\end{aligned}$$

4. Nombre de romans de chaque type :

Drame : $(2x + 3) \times (4x^2 - 9) = 8x^3 + 12x^2 - 18x - 27$
Policier : $(12x - 5) \times (7x + 3) = 84x^2 + x - 15$
Suspense : $(10x + 1) \times (6x^2 + 3x + 8) = 60x^3 + 36x^2 + 83x + 8$
Science-fiction : $(8x + 7) \times (8x - 7) = 64x^2 - 49$

Nombre total de romans :
$(8x^3 + 12x^2 - 18x - 27) + (84x^2 + x - 15) + (60x^3 + 36x^2 + 83x + 8) + (64x^2 - 49) = (68x^3 + 196x^2 + 66x - 83)$ romans

Réponse : Il y a $(68x^3 + 196x^2 + 66x - 83)$ romans dans cette bibliothèque.

RENFORCEMENT 2.2 Division de polynômes

1. a)

$$\begin{array}{r|l} 8x^4-26x^3+25x^2+17x-42 & 2x^3-3x^2+x+6 \\ \cline{2-2} -(8x^4-12x^3+4x^2+24x) & 4x-7 \\ \cline{1-1} -14x^3+21x^2-7x-42 & \\ -(-14x^3+21x^2-7x-42) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 60x^6y^3+36x^5y^2-45x^3y^2-27x^2y & 5x^2y+3x \\ \cline{2-2} -(60x^6y^3+36x^5y^2) & 12x^4y^2-9xy \\ \cline{1-1} 0-45x^3y^2-27x^2y & \\ -(-45x^3y^2-27x^2y) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} -15a^2b^4-11a^2b^3-2a^2b^2+17ab^2+7ab+4 & -3ab^2-ab+4 \\ \cline{2-2} -(-15a^2b^4-5a^2b^3+20ab^2) & 5ab^2+2ab+1 \\ \cline{1-1} -6a^2b^3-2a^2b^2-3ab^2+7ab+4 & \\ -(-6a^2b^3-2a^2b^2+8ab) & \\ \cline{1-1} -3ab^2-ab+4 & \\ -(-3ab^2-ab+4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} 16x^8z^{10}+42x^7z^7+20x^6z^4 & 2x^5z^4+4x^4z \\ \cline{2-2} -(16x^8z^{10}+32x^7z^7) & 8x^3z^6+5x^2z^3 \\ \cline{1-1} 10x^7z^7+20x^6z^4 & \\ -(10x^7z^7+20x^6z^4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2. a)

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+9x-5 & -x^2+2x+3 \\ \cline{2-2} -(4x^2-8x-12) & -4 \\ \cline{1-1} 17x+7 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 40a^2-41a+42 & 5a-7 \\ \cline{2-2} -(40a^2-56a) & 8a+3 \\ \cline{1-1} 15a+42 & \\ -(15a-21) & \\ \cline{1-1} 63 & \end{array}$$

3 a

$$A = b \times h$$
$$12x^3+23x^2-24x+5 = b \times (3x-1)$$
$$\begin{aligned} b &= (12x^3+23x^2-24x+5) \div (3x-1) \\ &= (4x^2+9x-5)\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{b \times h}{2} \\
30a^3 + 18a^2 + 10a + 6 &= \frac{(12a^2 + 4) \times h}{2} \\
(60a^3 + 36a^2 + 20a + 12) \div (12a^2 + 4) &= h \\
h &= (5a + 3)\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{(B + b) \times h}{2} \\
12x^4 + 16x^3 + 9x + 12 &= \frac{(8x^3 + 6) \times h}{2} \\
(24x^4 + 32x^3 + 18x + 24) \div (8x^3 + 6) &= h \\
h &= (3x + 4)\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{can}{2} \\
168b^2 - 183b + 45 &= c \times (8b - 3) \times 3 \\
(56b^2 - 61b + 15) \div (8b - 3) &= c \\
c &= (7b - 5)\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

4. Nombre total de cartes : $(20x^2 + 50x + 4) + (9x + 29) = (20x^2 + 59x + 33)$ cartes
Nombre total de personnes : $4x + 2 + 1 = (4x + 3)$ personnes
Moyenne : $(20x^2 + 59x + 33) \div (4x + 3) = (5x + 11)$ cartes

Réponse : Chacun possède en moyenne $(5x + 11)$ cartes.

RENFORCEMENT 3.1

Mise en évidence double

1. a)

$$\begin{aligned} &ab + 4a - 5b - 20 \\ &= a(b+4) - 5(b+4) \\ &= (\mathbf{b+4})(a-5) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &cd - 2c - 7d - 14 \\ &= c(d-2) - 7(d-2) \\ &= (d-2)(\mathbf{c-7}) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &xy + 8x + 7y + 56 \\ &= x(y+8) + 7(y+8) \\ &= (y+8)(\mathbf{x+7}) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} &ab + 2a - 2b - 2 \\ &= a(b+2) - 2(b+2) \\ &= (b+2)(\mathbf{a-2}) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &12xy + 8x - 3y - 2 \\ &= 4x(3y+2) - (3y+2) \\ &= (3y+2)(\mathbf{4x-1}) \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} &10ab + 5a + 8b + 4 \\ &= 5a(2b+1) + 4(2b+1) \\ &= (\mathbf{2b+1})(5a+4) \end{aligned}$$

2.

×	**(y + 3)**	**(y − 4)**	**(y + 2)**
(x − 2)	$xy + 3x - 2y - 6$	$xy - 4x - 2y + 8$	$xy + 2x - 2y - 4$
(x + 3)	$xy + 3x + 3y + 9$	$xy - 4x + 3y - 12$	$xy + 2x + 3y + 6$
(x − 4)	$xy + 3x - 4y - 12$	$xy - 4x - 4y + 16$	$xy + 2x - 4y - 8$

3. **a**

$$\begin{aligned} &xy + 3y + 8x + 24 \\ &= y(x+3) + 8(x+3) \\ &= (x+3)\,(y+8) \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} &xy + 9x - 6y - 54 \\ &= x(y+9) - 6(y+9) \\ &= (y+9)\,(x-6) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &cd + 1 - c - d \\ &cd - c - d + 1 \\ &= c(d-1) - (d-1) \\ &= (d-1)\,(c-1) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} &20ab + 20 - 16a - 25b \\ &20ab - 16a - 25b + 20 \\ &= 4a(5b-4a) - 5(5b-4) \\ &= (5b-4)\,(4a-5) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &9st + 16 + 12s + 12t \\ &9st + 12s + 12t + 16 \\ &= 3s(3t+4) + 4(3t+4) \\ &= (3t+4)\,(3s+4) \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} &2x^2y - 10y + 3x^2 - 15 \\ &2x^2y - 10y + 3x^2 - 15 \\ &= 2y(x^2-5) + 3(x^2-5) \\ &= (x^2-5)\,(2y+3) \end{aligned}$$

4. En factorisant l'expression, il est possible de déterminer que :

$$\begin{aligned} 2a^2 + 48 + 24a + 4a &= (2a^2 + 24a) + (4a + 48) \\ &= 2a(a+12) + 4(a+12) \\ &= (2a+4)\,(a+12) \end{aligned}$$

On déduit que le plus grand côté correspond à l'expression

$2a + 4 : 60 = 2a + 4$

$a = 28$

Le plus petit côté correspond à l'expression $a + 12$: $28 + 12 = 40$

Aire totale du terrain : $40 \times 60 = 2400\ \text{m}^2$

Prix du terrain : $2400 \times 22 = 52\,800$ \$

Réponse : Le prix du terrain est de 52 800 \$.

RENFORCEMENT 3.2 Trinôme carré parfait et différence de deux carrés

1. **a)**
$$\begin{aligned} & a^2 + 16a + 64 \\ &= \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{64}\right)^2 \\ &= (a+8)^2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & b^2 - 20b + 100 \\ &= \left(\sqrt{b^2} - \sqrt{100}\right)^2 \\ &= (b-10)^2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} & 4c^2 + 20c + 25 \\ &= \left(\sqrt{4c^2} + \sqrt{25}\right)^2 \\ &= (2c+5)^2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} & 49d^2 - 210d + 225 \\ & 49d^2 - 210d + 225 \\ &= \left(\sqrt{49d^2} - \sqrt{225}\right)^2 \\ &= (7d-15)^2 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} & 16e^2 + 40e + 25 \\ & 16e^2 + 40e + 25 \\ &= \left(\sqrt{16e^2} + \sqrt{25}\right)^2 \\ &= (4e+5)^2 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} & 121f^2 - 66fg + 9g^2 \\ & 121f^2 - 66fg + 9g^2 \\ &= \left(\sqrt{121f^2} - \sqrt{9g^2}\right)^2 \\ &= (11f-3g)^2 \end{aligned}$$

2. **a)**
$$\begin{aligned} & a^2 - 16 \\ &= (a)^2 - (4)^2 \\ &= (a+4)(a-4) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & b^2 - 400 \\ &= (b)^2 - (20)^2 \\ &= (b+20)(b-20) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} & 81c^2 - 1 \\ &= (9c)^2 - (1)^2 \\ &= (9c+1)(9c-1) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} & 144d^2 - 625 \\ &= (12d)^2 - (25)^2 \\ &= (12d+25)(12d-25) \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} & e^2 - 2{,}25 \\ &= (e)^2 - (1{,}5)^2 \\ &= (e+1{,}5)(e-1{,}5) \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} & 4f^2 - 25g^2 \\ &= (2f)^2 - (5g)^2 \\ &= (2f+5g)(2f-5g) \end{aligned}$$

3. Ⓐ – ⑧, Ⓑ – ⑥, Ⓒ – ②, Ⓓ – ④, Ⓔ – ⑦, Ⓕ – ⑤, Ⓖ – ①, Ⓗ – ③.

4.
$$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= L \times l \\ &= 9x^2 - 42{,}25 \end{aligned}$$

On factorise cette expression :

$9x^2 - 42{,}25 = (3x + 6{,}5)(3x - 6{,}5)$

Puisque $x > 0$, $(3x + 6{,}5)$ est une dimension plus grande que $(3x - 6{,}5)$, il s'agit donc de la dimension
du plus grand côté.

Réponse : Le plus grand côté du rectangle mesure $(3x + 6{,}5)$ m.

5. Puisque $A_{\text{carré}} = c^2$, on peut déterminer la mesure d'un côté en factorisant l'expression :
$4x^2 + 56x + 49 = (2x + 7)^2$ mm

On peut déduire le périmètre à partir de la mesure de ce côté :
$$\begin{aligned} P_{\text{carré}} &= 4(2x+7) \\ &= (8x+28)\ \text{m} \end{aligned}$$

Réponse : L'expression algébrique qui représente le périmètre du timbre est $(8x + 28)$ mm.

RENFORCEMENT 3.3 Complétion du carré

1. **a)** **1)** 16 **2)** $(x+4)^2$ **b)** **1)** 100 **2)** $(x+10)^2$

c) **1)** 36 **2)** $(x-6)^2$ **d)** **1)** 2500 **2)** $(x-50)^2$

e) **1)** 225 **2)** $(x+15)^2$ **f)** **1)** 12,25 **2)** $(x-3,5)^2$

g) **1)** 0,25 **2)** $(x-0,5)^2$ **h)** **1)** 6,25 **2)** $(x+2,5)^2$

2. **a)**

$$\begin{aligned}&x^2+14x+48\\&=x^2+14x+49-49+48\\&=(x^2+14x+49)-1\\&=(x+7)^2-1\\&=(x+7+1)(x+7-1)\\&=(x+8)(x+6)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&x^2-x-12\\&=x^2-x+0,25-0,25-12\\&=(x^2-x+0,25)-12,25\\&=(x-0,5)^2-12,25\\&=(x-0,5+3,5)(x-0,5-3,5)\\&=(x+3)(x-4)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&4x^2+44x+117\\&=4(x^2-11x+29,25)\\&=4(x^2-11x+30,25-30,25+29,25)\\&=4\big((x^2-11x+30,25)-1\big)\\&=4((x-5,5)^2-1)\\&=4(x-5,5+1)(x-5,5-1)\\&=4(x-4,5)(x-6,5)\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&100x^2+60x-432\\&=100(x^2+0,6x-4,32)\\&=100(x^2+0,6x+0,09-0,09-4,32)\\&=100\big((x^2+0,6x+0,09)-4,41\big)\\&=100((x+0,3)^2-4,41)\\&=100(x+0,3+2,1)(x+0,3-2,1)\\&=100(x+2,4)(x-1,8)\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}&\text{-}8x^2-60x+2000\\&=\text{-}8(x^2+7,5x-250)\\&=\text{-}8(x^2+7,5x+14,0625-14,0625-250)\\&=\text{-}8\big((x^2+7,5x+14,0625)-264,0625\big)\\&=\text{-}8((x+3,75)^2-264,0625)\\&=\text{-}8(x+3,75+16,25)(x+3,75-16,25)\\&=\text{-}8(x+20)(x-12,5)\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}&12x^2+24x+9\\&=12(x^2+2x+0,75)\\&=12(x^2+2x+1-1+0,75)\\&=12\big((x^2+2x+1)-0,25\big)\\&=12((x+1)^2-0,25)\\&=12(x+1+0,5)(x+1-0,5)\\&=12(x+1,5)(x+0,5)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}A_{\text{triangle}}&=\frac{b\times h}{2}\\&=0,5x^2+6,5x+19,125\\b\times h&=x^2+13x+38,25\end{aligned}$$

On factorise cette expression :

$$\begin{aligned}x^2+13x+38,25&=x^2+13x+42,25-42,25+38,25\\&=(x^2+13x+42,25)-4\\&=(x+6,5)^2-4\\&=(x+6,5+2)(x+6,5-2)\\&=(x+8,5)(x+4,5)\end{aligned}$$

Puisque $x>0$, $(x+4,5)$ est une dimension plus petite que $(x+8,5)$, il s'agit donc de la dimension de la hauteur du triangle.

Réponse : La hauteur du triangle mesure $(x+4,5)$ m.

4. $$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= L \times l \\ &= x^2 + 7{,}5x + 12{,}5 \end{aligned}$$

On factorise cette expression :

$$\begin{aligned} x^2 + 7{,}5x + 12{,}5 &= x^2 + 7{,}5x + 14{,}0625 - 14{,}0625 + 12{,}5 \\ &= (x^2 + 7{,}5x + 14{,}0625) - 1{,}5625 \\ &= (x + 3{,}75)^2 - 1{,}5625 \\ &= (x + 3{,}75 + 1{,}25)(x + 3{,}75 - 1{,}25) \\ &= (x + 5)(x + 2{,}5) \end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, $(x + 2{,}5)$ est une dimension plus petite que $(x + 5)$, il s'agit donc du côté qui mesure 25 cm :

$x + 2{,}5 = 25$
$x = 22{,}5$ cm

Dimension du plus grand côté : $22{,}5 + 5 = 27{,}5$ cm

Réponse : Le plus grand côté du rectangle mesure 27,5 cm.

RENFORCEMENT 3.4 Factorisation de trinômes

1.

	$m \times n$	m	n	$m + n$
a)	60	**4**	**15**	19
b)	-60	**-5**	**12**	7
c)	-60	**6**	**-10**	-4
d)	60	**-5**	**-12**	-17
e)	-60	**3**	**-20**	-17

	$m \times n$	m	n	$m + n$
f)	-15	**5**	**-3**	2
g)	24	**-3**	**-8**	-11
h)	-36	**-6**	**6**	0
i)	36	**-3**	**-12**	-15

2. **a)** Vrai. **b)** Faux. **c)** Faux. **d)** Vrai. **e)** Vrai. **f)** Faux. **g)** Vrai. **h)** Vrai.

3. **a)** $x^2 + 14x + 24$
$m \times n = 24$
$m + n = 14$
Donc, $m = 12$ et $n = 2$.
$x^2 + 14x + 24$
$= (x + 12)(x + 2)$

b) $x^2 - 6x - 27$
$m \times n = -27$
$m + n = -6$
Donc, $m = 3$ et $n = -9$.
$x^2 - 6x - 27$
$= (x + 3)(x - 9)$

c) $x^2 - 11x + 10$
$m \times n = 10$
$m + n = -11$
Donc, $m = -1$ et $n = -10$.
$x^2 - 11x + 10$
$= (x - 1)(x - 10)$

d) $x^2 - 26x - 120$
$m \times n = -120$
$m + n = -26$
Donc, $m = 4$ et $n = -30$.
$x^2 - 26x - 120$
$= (x + 4)(x - 30)$

e) $x^2 - 17x + 60$
$m \times n = 60$
$m + n = -17$
Donc, $m = -5$ et $n = -12$.
$x^2 - 17x + 60$
$= (x - 5)(x - 12)$

f) $x^2 - 13x - 48$
$m \times n = -48$
$m + n = -13$
Donc, $m = 3$ et $n = -16$.
$x^2 - 13x - 48$
$= (x + 3)(x - 16)$

4. **a)** $2x^2 + 19x + 45$
$m \times n = 90$
$m + n = 19$
Donc, $m = 10$ et $n = 9$.
$2x^2 + 19x + 45$
$= 2x^2 + \mathbf{10x} + \mathbf{9x} + 45$
$= 2x(x + 5) + 9(x + 5)$
$= (x + 5)(2x + 9)$

b) $4x^2 - 19x - 5$
$m \times n = -20$
$m + n = -19$
Donc, $m = -20$ et $n = 1$.
$4x^2 - 19x - 5$
$= 4x^2 - \mathbf{20x} + \mathbf{x} - 5$
$= 4x(x - 5) + (x - 5)$
$= (x - 5)(4x + 1)$

c) $18x^2 - 33x + 14$
$m \times n = 252$
$m + n = -33$
Donc, $m = -21$ et $n = -12$.
$18x^2 - 33x + 14$
$= 18x^2 - \mathbf{21x} - \mathbf{12x} + 14$
$= 3x(6x - 7) - 2(6x - 7)$
$= (6x - 7)(3x - 2)$

d) $8x^2 - 14x - 15$
$m \times n = -120$
$m + n = -14$
Donc, $m = -20$ et $n = 6$.
$8x^2 - 14x - 15$
$= 8x^2 - \mathbf{20x} + \mathbf{6x} - 15$
$= 4x(2x - 5) + 3(2x - 5)$
$= (2x - 5)(4x + 3)$

e) $3x^2 - 4x + 1$
$m \times n = 3$
$m + n = -4$
Donc, $m = -3$ et $n = -1$.
$3x^2 - 4x + 1$
$= 3x^2 - \mathbf{x} - \mathbf{3x} + 1$
$= x(3x - 1) - (3x - 1)$
$= (3x - 1)(x - 1)$

f) $12x^2 - 17x + 6$
$m \times n = 72$
$m + n = -17$
Donc, $m = -8$ et $n = -9$.
$12x^2 - 17x + 6$
$= 12x^2 - \mathbf{8x} - \mathbf{9x} + 6$
$= 4x(3x - 2) - 3(3x - 2)$
$= (3x - 2)(4x - 3)$

5. En factorisant chaque expression, il est possible de déterminer que :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 11x - 12 &= 5x^2 - 15x + 4x - 12 \\ &= 5x(x - 3) + 4(x - 3) \\ &= (x - 3)(5x + 4) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x^2 + 29x + 20 &= 5x^2 + 25x + 4x + 20 \\ &= 5x(x + 5) + 4(x + 5) \\ &= (x + 5)(5x + 4) \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

Réponse :
La longueur, la largeur et la hauteur de ce prisme peuvent mesurer respectivement $(5x + 4)$ m, $(x - 3)$ m et $(x + 5)$ m.

RENFORCEMENT 2.3 Manipulation d’expressions rationnelles

1. **a)**
$$a - 2 \neq 0$$
$$a \neq 2$$

b)
$$3x - 21 \neq 0$$
$$x \neq 7$$

c)
$$5a + 15 \neq 0$$
$$a \neq \text{-}3$$

2. **a**
$$\frac{(5x+1)\times 2}{3\times 2} - \frac{19x^2+7x}{6}$$
$$= \frac{10x+2}{6} - \frac{19x^2+7x}{6}$$
$$= \frac{\text{-}19x^2+3x+2}{6}$$

b
$$\frac{19x+6-5x^2+11}{3x-4}$$
$$= \frac{\text{-}5x^2+19x+17}{3x-4}$$
$$\frac{\text{-}5x^2+19x+17}{3x-4}, \text{si } x \neq \frac{4}{3}$$

c
$$\frac{7x-4}{5(2x+1)} + \frac{(3x+8)\times 5}{(2x+1)\times 5}$$
$$= \frac{7x-4+15x+40}{5(2x+1)}$$
$$= \frac{22x+36}{10x+5}$$
$$\frac{22x+36}{10x+5}, \text{si } x \neq \text{-}\frac{1}{2}$$

3. **a)**
$$\frac{4x^2-20x-x+5}{14x+21-2x^2-3x}$$
$$= \frac{4x^2-21x+5}{\text{-}2x^2+11x+21}$$
$$\frac{4x^2-21x+5}{\text{-}2x^2+11x+21}, \text{si } x \neq \text{-}\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 7$$

b)
$$\frac{x^2+3x-2x-6}{15x^2+5x+18x+6}$$
$$= \frac{x^2+x-6}{15x^2+23x+6}$$
$$\frac{x^2+x-6}{15x^2+23x+6}, \text{si } x \neq \text{-}\frac{6}{5} \text{ et } x \neq \text{-}\frac{1}{3}$$

c)
$$\frac{7x^2+8x-21x-24}{24x^2-4x+54x-9}$$
$$= \frac{7x^2-13x-24}{24x^2+50x-9}$$
$$\frac{7x^2-13x-24}{24x^2+50x-9}, \text{si } x \neq \frac{1}{6} \text{ et } x \neq -\frac{9}{4}$$

4. **a)**

$$\frac{10x-9}{x-4}\times\frac{3x+2}{x+6}$$

$$=\frac{30x^2-7x-18}{x^2+2x-24}$$

$$\frac{30x^2-7x-18}{x^2+2x-24},$$

$$\text{si } x \neq \text{-}6, x \neq \text{-}\frac{2}{3} \text{ et } x \neq 4$$

b)

$$\frac{8x-11}{2x+4}\times\frac{x+5}{3x-9}$$

$$=\frac{8x^2+29x-55}{6x^2-6x-36}$$

$$\frac{8x^2+29x-55}{6x^2-6x-36},$$

$$\text{si } x \neq \text{-}5, x \neq \text{-}2 \text{ et } x \neq 3$$

c)

$$\frac{2x+7}{3x+13}\times\frac{12x+6}{4x+2}$$

$$=\frac{24x^2+96x+42}{12x^2+58x+26}$$

$$\frac{24x^2+96x+42}{12x^2+58x+26},$$

$$\text{si } x \neq \text{-}\frac{13}{3} \text{ et } x \neq \text{-}\frac{1}{2}$$

5. **a)**

$$\frac{27x^2+9x}{9x^2}$$

$$=\frac{9x(3x+1)}{9x\times x}$$

$$=\frac{3x+1}{x}$$

$$\frac{3x+1}{x}, \text{si } x \neq 0$$

b)

$$\frac{(8x+3)(5x-2)}{(5x-2)(11x+6)}$$

$$=\frac{8x+3}{11x+6}, \text{si } x \neq \text{-}\frac{6}{11} \text{ et } x \neq \frac{2}{5}$$

c)

$$\frac{(6x+1)(2x+3)}{6x+9}$$

$$=\frac{(6x+1)(2x+3)}{3(2x+3)}$$

$$=\frac{6x+1}{3}$$

$$\frac{6x+1}{3}, \text{si } x \neq \text{-}\frac{3}{2}$$

d) $$\frac{14x^3 + 22x^2 + 10x}{8x^2 + 6x}$$
$$= \frac{2x(7x^2 + 11x + 5)}{2x(4x + 3)}$$
$$= \frac{7x^2 + 11x + 5}{4x + 3}$$
$$\frac{7x^2 + 11x + 5}{4x + 3}, \text{si } x \neq -\frac{3}{4} \text{ et } x \neq 0$$

e) $$\frac{34x^3 + 15x^2 - 8x}{8x}$$
$$= \frac{x(34x^2 + 15x - 8)}{8 \times x}$$
$$= \frac{34x^2 + 15x - 8}{8}$$
$$\frac{34x^2 + 15x - 8}{8}, \text{si } x \neq 0$$

f) $$\frac{(7x - 9)(3x + 4)}{12x^2 + 16x}$$
$$= \frac{(7x - 9)(3x + 4)}{4x(3x + 4)}$$
$$= \frac{7x - 9}{4x}$$
$$\frac{7x - 9}{4x}, \text{si } x \neq -\frac{4}{3} \text{ et } x \neq 0$$

6. a) $$\frac{6x^2 - 21x}{2x - 7} = \frac{3x(2x - 7)}{2x - 7}$$
$$= 3x$$

b) Non, la valeur de *x* associée à cette situation ne peut pas être égale à 3,5, car le dénominateur de l'expression rationnelle associée à cette situation serait alors égal à zéro.

Réponse : Oui, elle atteint son objectif

1. a) 1) $$\frac{x^2+5x-36}{x+9}$$
$$=\frac{(x-4)(x+9)}{x+9}=\frac{(x-4)(x+9)}{x+9}$$
$$=(x-4)$$

2) $x \neq$ -9

b) 1) $$\frac{2x^2+19x+24}{x^2+6x-16}$$
$$=\frac{(2x+3)(x+8)}{(x-2)(x+8)}=\frac{(2x+3)(x+8)}{(x-2)(x+8)}$$
$$=\frac{2x+3}{x-2}$$

2) $x \neq$ -8 et $x \neq 2$.

c) 1) $$\frac{9x^3+24x^2+16x}{3xy+3x+4y+4}$$
$$=\frac{x(3x+4)^2}{(3x+4)\,(y+1)}=\frac{x(3x+4)^2}{(3x+4)\,(y+1)}$$
$$=\frac{x(3x+4)}{y+1}$$

2) $x \neq -\frac{4}{3}$ et $y \neq$ -1.

d) 1) $$\frac{16x^2-25}{4x^2-9x+5}$$
$$=\frac{(4x+5)\,(4x-5)}{(4x-5)\,(x-1)}=\frac{(4x+5)\,(4x-5)}{(4x-5)\,(x-1)}$$
$$=\frac{4x+5}{x-1}$$

2) $x \neq 1{,}25$ et $x \neq 1$.

2. a) 1) $$\frac{2}{x+8}+\frac{3}{x-12}$$
$$=\frac{2(x-12)}{(x+8)\,(x-12)}+\frac{3(x+8)}{(x+8)\,(x-12)}$$
$$=\frac{2x-24+3x+24}{(x+8)\,(x-12)}=\frac{5x}{(x+8)\,(x-12)}$$

2) $x \neq$ -8 et $x \neq 12$.

b) 1) $$\frac{6}{2x+3}-\frac{6}{2x-3}$$
$$=\frac{6(2x-3)}{(2x+3)\,(2x-3)}-\frac{6(2x+3)}{(2x+3)\,(2x-3)}$$
$$=\frac{12x-18-12x-18}{(2x+3)\,(2x-3)}=\frac{-36}{(2x+3)\,(2x-3)}$$

2) $x \neq$ -1,5 et $x \neq$ 1,5.

c) 1) $$\frac{3}{x^2-25}+\frac{4}{x^2-6x+5}$$
$$=\frac{3(x-1)}{(x+5)\,(x-5)(x-1)}+\frac{4(x+5)}{(x+5)\,(x-5)(x-1)}$$
$$=\frac{3x-3+4x+20}{(x+5)\,(x-5)\,(x-1)}=\frac{7x+17}{(x+5)\,(x-5)\,(x-1)}$$

2) $x \neq$ -5, $x \neq 1$ et $x \neq 5$.

d) 1) $$\frac{x-2}{x^2-8x+16}-\frac{2}{x^2-6x+8}$$
$$=\frac{(x-2)\,(x-2)}{(x-4)^2(x-2)}-\frac{2(x-4)}{(x-4)^2(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-4x+4-2x+8}{(x-4)^2(x-2)}=\frac{x^2-6x+12}{(x-4)^2(x-2)}$$

2) $x \neq 2$ et $x \neq 4$.